

Title	平行板の間の熱対流の安定性 (層流の安定性に関する非線形問題研究会報告集)
Author(s)	後藤, 金英; 池田, 紀人
Citation	数理解析研究所講究録 (1970), 97: 129-148
Issue Date	1970-09
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/108185">http://hdl.handle.net/2433/108185</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 平行板の間の熱対流の安定性

京大 数理研 後藤金英

京大 理 池田紀人

1. まえがき

鉛直におかれた二枚の平行平板を互いに異なる一定温度に保った時に生ずる、平板の間に満たされた流体の対流が不安定であることは、Elder<sup>1)</sup>, Oshima 達の実験で示されている。Gotoh & Satoh は、微小攪乱に対するこの流れの不安定性を解析したが、不安定を与える Reynolds 数（或は Rayleigh 数）の臨界値については、実験値の  $10 \sim 10^2$  倍も大きな値しか得ていない。その時用いられた、乱されない温度・速度分布は、それが板に沿っては変化しないという仮定のもとに得られた直線温度分布とそれに適合する速度分布である。以下ではこれを A-profile と呼ぶことにする。[§2 の (2.8), (2.9)]。云うまでもなく、有限深さの水槽で行われる実験でこの理想化を実現することは困難で、多くの場合、観測された温度分布・速度分布は平板の近くでのみ変化（僅かではあるが鉛直方向にも変化）する境界層型と

なる。これを以下では B-profile と呼ぼう。B-profile の実現は、一般に水槽の有限深さの結果と考えられている。

一方、静止している流体に対し、ある時刻以後平板に一定温度差を与えると、(A-profile を得た時と同じ仮定のもとに)最終的には A-profile を与えるような非定常な温度・速度分布が得られるか [§2 の (2.7)], それらはその途上 B-profile とかなり類似した profile を経過する。これを  $A_t$ -profile と呼ぶことにしよう。

こゝで、次のことが問題になり得る。この  $A_t$ -profile は A-profile に比べて、より安定なのか不安定なのか。もし不安定であれば、勿論 A-profile は実現されないし、当初の対流の不安定性は、 $A_t$ -profile の安定問題として捉えられるべきであり、また B-profile の解釈も異なってくるであろう。この報告では、これらの事柄を背景として、 $A_t$ -profile の線型安定性と問題とし、解析の結果を報告する。

この非定常な  $A_t$ -profile は、板に与えられた温度差の影響が、熱伝達と粘性の働きによって、二平板間の流体の中央部分に伝わることにより生ずるもので、その時間変化は、攪乱の時間変化に比べて、 $1/(\text{主流の Reynolds 数})$  または  $1/(\text{Rayleigh 数} = \text{Prandtl 数} \times \text{Reynolds 数})$  の程度である。従って、 $O(1/\text{Reynolds 数})$  を無視する漸近理論では、主流の

時間変化は擾乱の時間変化に比べて無視できて、各瞬間における profile を定常 profile とみなして、その安定性を考えることが出来る。

計算の結果は、臨界 Reynolds 数が  $A_t$ -profile の時間経過と共に  $\infty$  から単調に減少する。即ち、この非定常系:  $A_t$ -profile においては、 $t \rightarrow \infty$  における  $A$ -profile が最も不安定であることが結論される。この結果、実験の説明を非定常過程に求める可能性は否定される。しかし尚、 $A$ -profile 実現の観測にたてば興味ある結果と云えよう。

この計算の進行中、Vest & Arpaci<sup>4)</sup> が  $A$ -profile の安定性を、擾乱の位相速度  $= 0$  と仮定し、Galerkin 法を用いて取り扱い、中立安定モードと Reynolds 数の関係を求め、測定に近い臨界 Reynolds 数を得た。この結果は、Gotoh & Satoh の結果が実験結果を説明しないのは、profile の違いに因かあるのではなく、不安定をいさおす擾乱のモードの違いにある可能性をホレているが、その解析には若干の疑問がもたれる。その一つは、あらかじめ擾乱の位相速度  $= 0$  と仮定することであり、今一つは、Galerkin 法の適用である。壁を伴う流れに許される擾乱は、一般に壁の近傍で境界層的な振舞をホレ、これを Galerkin 近似することは精度の真から見て極めて妥当性を欠く。最近我々は、 $A$ -profile の型の任意の

速度分布について、有限波数・0-位相速度の中立安定攪乱が非粘性の極限において必ず存在することを知れた。<sup>5)</sup> この解を漸近解とする有限 Reynolds 数での中立安定モードは、Gotoh & Satoh の取り扱ったモードとは全く異った系列に属し、定性的に Vest & Arpaci の結果に近いものが得られそうである。但し、位相速度は0にならない。この計算は目下進行中で、次の論文の課題となるであろう。

## 2. 非定常な層流と温度分布

$2L^*$  の間隔で鉛直におかれた二枚の平行な無限平板と、その間を満たす流体を考える。板の面に垂直な方向に  $x^*$  軸を、鉛直上向に  $z^*$  軸をもつ座標系  $(x^*, y^*, z^*)$  を用いる。平板は、 $x^* = \pm L^*$  で表されるとする。時刻  $t^* (< 0)$  において、流体は温度  $T_0^*$  で静止し、平板の温度も  $T_0^*$  とする。この節では、 $t^* \geq 0$  で、 $x^* = \pm L^*$  にある板の温度を  $T_0^* \pm \Delta T^*$  とした時の  $t^* > 0$  での流体の速度分布と温度分布を求めよう (図 1)。

大抵の流体はその体膨張率が小さいので、流体の運動に対する温度の影響を考える場合、重力の関与する項以外では流体の密度変化を無視する。又、熱伝導を考える際、粘性による発熱の項を他の項に比べて無視する。これを Boussinesq 近似という (例えば、Chandrasekhar<sup>6)</sup> 参照)。

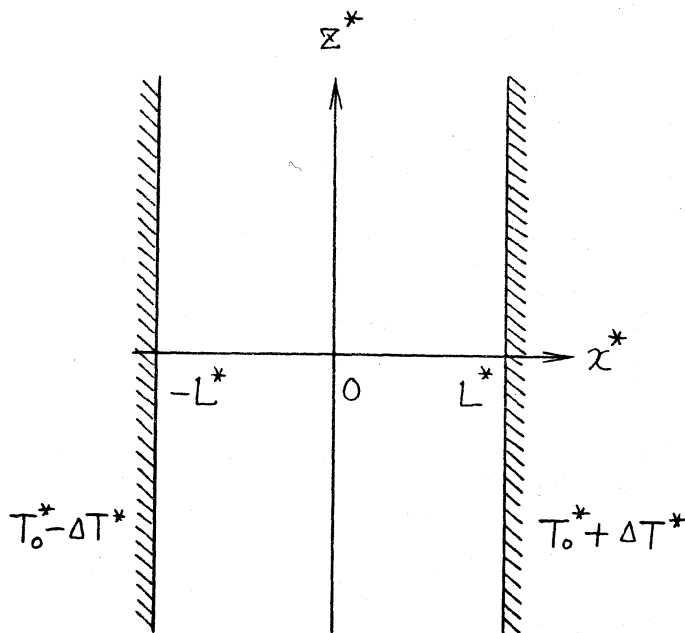


図 1

代表的な長さ，速度，温度として， $L^*$ ， $w_0^* [= g^* \gamma^* \Delta T^* L^{*2} / (6\nu^*)]$ ；但し， $g^*$ は重力加速度， $\gamma^*$ は体膨張率， $\nu^*$ は動粘性係数である]， $\Delta T^*$ を用いて無次元化すると，上述の近似のもとに基礎方程式は次のように書かれる。

運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = -\nabla p + \frac{6}{\gamma^* \Delta T^*} \frac{1}{Re} \left( 1 + \frac{\delta p}{p_0} \right) g + \frac{1}{Re} \nabla^2 u,$$

連続方程式：

$$\nabla u = 0,$$

熱膨張の方程式:

$$\frac{\delta p}{\rho_0} = -\gamma^* \Delta T^* T,$$

熱伝導の方程式:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \nabla) T = \frac{1}{Ra} \nabla^2 T,$$

(2.1)

ここで,  $u$ : 流体の速度,

$p$ : 圧力,

$\rho$ : 流体の密度,

$\rho_0$ : 基準温度での密度,

$T$ : 基準状態からの温度差,

$g = (0, 0, -1)$ : 無次元化重力加速度,

であり,  $\delta p = p - p_0$ ,  $Re = (g^* \gamma^* \Delta T^* L^{*3}) / (6 \nu^{*2})$  は

Reynolds 数,  $Ra = P Re = (g^* \gamma^* \Delta T^* L^{*3}) / (6 \nu^* \kappa^*)$  は

Rayleigh 数である。但し,  $\kappa^*$  は 温度伝導率,  $P = \nu^* / \kappa^*$

Prandtl 数である。

$u, T$  を  $u = [0, 0, w(x, t)]$ ,  $T = T(x, t)$  の形に

仮定すると, (2.1) は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{6}{\gamma^* \Delta T^*} \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re} (6T + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}),$$

(2.2)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Ra} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

となる。

壁面での粘着条件および、与えられた速度と温度に対する境界条件から、 $W$ ,  $T$  についての初期条件と境界条件は次のようになる。

初期条件:  $-1 \leq x \leq 1$  に対して,

$$W(x, 0) = T(x, 0) = 0, \quad (2.3)$$

境界条件:  $t > 0$  に対して,

$$\left. \begin{aligned} W(1, t) = W(-1, t) &= 0, \\ T(1, t) = 1, \quad T(-1, t) &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

方程式 (2.2) と境界条件 (2.4) から、 $W$  および  $T$  は  $x$  について、奇函数であることがわかる。(2.2) のオー式, オ=式から

$$p = -\frac{b}{\gamma^* \Delta T^*} \frac{1}{Re} \tau + \text{const.} \quad (2.5)$$

であることがわかるから、 $W$ ,  $T$  についての方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{Re} (bT + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{Ra} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

となる。

方程式 (2.6) と (2.3), (2.4) のもとに Laplace 変換



を用いて解くと,  $P \neq 1$  に対して,

$$\begin{aligned} T(x, t) &= x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{Ra}} \sin n\pi x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1-x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1+x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} \right] \\ &\sim \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1-x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} - \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1+x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\}, \quad \frac{t}{Ra} \ll 1 \text{ のとき}; \end{aligned}$$

$$W(x, t) = x(1-x^2)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{12}{\pi^3(P-1)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \left\{ P e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{Ra}} - e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{Re}} \right\} \sin n\pi x \quad (2.7) \\ &= \frac{24t}{(P-1)Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1-x}{2} \sqrt{\frac{Re}{t}} \right\} - i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1+x}{2} \sqrt{\frac{Re}{t}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1-x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} + i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{2n+1+x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} \right] \\ &\sim \frac{24t}{(P-1)Re} \left[ i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1-x}{2} \sqrt{\frac{Re}{t}} \right\} - i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1+x}{2} \sqrt{\frac{Re}{t}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1-x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} + i^2 \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1+x}{2} \sqrt{\frac{Ra}{t}} \right\} \right], \\ &\quad \frac{t}{Re}, \frac{t}{Ra} \ll 1 \text{ のとき}, \end{aligned}$$

となる。 且し,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$i^2 \operatorname{erfc}(x) = \int_x^{\infty} dx \int_x^{\infty} dx \operatorname{erfc}(x),$$

である。

これは勿論  $t \rightarrow \infty$  で Gotoh + Satoh<sup>3)</sup> の用に A-profile :

$$T(x) = x, \quad (2.8)$$

$$W(x) = x(1-x^2), \quad (2.9)$$

に漸近する。

$P = 7.5$  (水の場合) としての時の  $W, T$  を図 2 に示す。

この解の時間依存は  $t/Re$  の程度であり,  $t$  について  $O(1)$  の尺度で変化する攪乱に対しては, 十分大きな Reynolds 数の場合には, 前節で述べたように, 攪乱に対して主流は定常とみなすことが出来る。

### 3. 線型安定問題

#### 3-1. 問題の定式化

前節で得た主流と温度分布の安定性を調べるために,  $u = [0, 0, W], T, p$  に微小攪乱:  $\hat{u} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}], \hat{T}, \hat{p}$  を重ね合せ,  $u + \hat{u}, T + \hat{T}, p + \hat{p}$  を方程式 (2.1) に代入し, 攪乱について二次の項を無視すると,  $\hat{u}, \hat{T}, \hat{p}$  についての線型化された方程式が得られる。前節の考察から,  $W, T$  に含まれる  $t/Re$  (又は  $t/Ra$ ) は単なる parameter として扱う。以下,  $t/Re = \tau$  とする。

$W, T$  が  $y$  軸方向に依らないことから,  $\hat{u}, \hat{T}, \hat{p}$  は調和成分に分解でき, 線型理論では各モードを独立に取扱

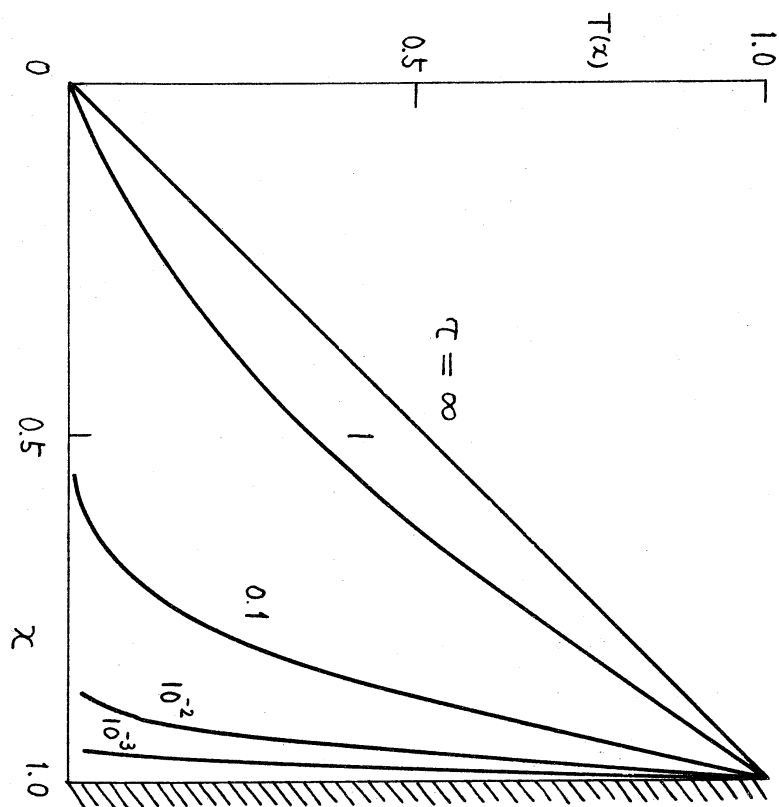
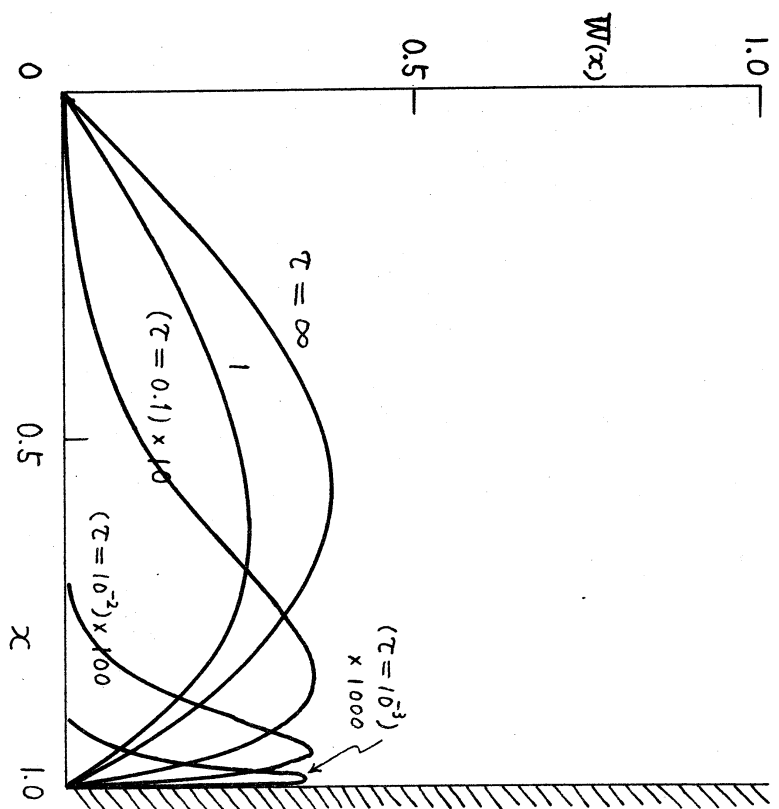


Fig 2

を得る。調和成分：

$$[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}; \hat{\tau}; \hat{p}] = [\phi(x), \psi(x), \chi(x); \theta(x); \varpi(x)] \\ \times \exp[i\alpha(z - ct) + i\beta y], \quad (3.1)$$

を線型化した方程式に代入し、 $\psi, \chi, \varpi$  を消去すると、

$$(W - C)(D^2 - \lambda^2)\phi - (D^2\varpi)\phi = \frac{1}{i\alpha Re} [(D^2 - \lambda^2)^2\phi - 6D\theta], \quad (3.2)$$

$$(W - C)\theta + DT\phi = \frac{1}{i\alpha Ra} (D^2 - \lambda^2)\theta, \quad (3.3)$$

が得られる。ここで、 $\beta, \alpha$  は実数で、それぞれ  $y, z$  方向の波数を表わし、複素数  $C = C_r + iC_i$  は、 $C_r$  が位相速度、 $\alpha C_i$  が増中率を表わす。 $D$  は  $x$  についての微分であり、 $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$  である。(3.2) と (3.3) は、 $P$  を固定すると、parameter を  $\alpha Re$  と  $\lambda$  の形でしか含まないから、この問題でも Squire の定理 (例えば、Lin<sup>7)</sup> 参照) が成り立つことが判る。従って、臨界 Reynolds 数を求める以下の計算では、二次元擾乱 ( $\beta = 0$ ) のみを考えれば十分である。

すべての擾乱は境界で 0 になるべきだから境界条件は、

$$\phi(\pm 1) = D\phi(\pm 1) = 0, \quad (3.4)$$

$$\theta(\pm 1) = 0, \quad (3.5)$$

で与えられる。

方程式 (3.2), (3.3) からわかるように、一般的には、温度擾乱と速度擾乱は互いに関連し、両式を連立させて解く

べきであるが、 $Re \gg 1$  に対する漸近理論では、(3.2) で  $\theta$  の項を無視できることから Gotoh & Satoh によって示されている。このとき、方程式 (3.2) は  $\phi$  についての Orr-Sommerfeld 方程式：

$$(W - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 W)\phi = \frac{1}{i\alpha Re}(D^2 - \alpha^2)^2 \phi \quad (3.2)'$$

になり、これを単独に解いて、系の安定性は決る。(3.3) は  $\theta$  を求めるためにのみ用いられる。

### 3-2. (3.2)' の解と固有値方程式

$\alpha Re \gg 1$  のとき、(3.2)' の解を  $(\alpha Re)^{-1}$  の power で展開すると、その最低次の項に対しては、(3.2)' で右辺を省略した非粘性方程式：

$$(W - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - (D^2 W)\phi = 0 \quad (3.6)$$

が得られる。この方程式は  $W(x_s) = c$  ( $s = 1, 2, 3$ ) となる  $x_s$  を特異点とするが、 $x$  を複素平面に拡張し、この特異点をさける領域で解を求めれば、二つの境界を含む領域で解析的な解が求まる。 $x_s$  における解の特異性は対数的であり、 $DW(x_s) > 0$  なら特異点の下側を、 $DW(x_s) < 0$  なら上側を通る領域を選べば (3.6) の解が (3.2)' の四つの解のうち二つの  $\alpha Re \rightarrow \infty$  での漸近解になっていることが知られている (例えば 参考文献 [7] 参照)。以下これを  $\phi_+$ ,  $\phi_-$  と

表わす。

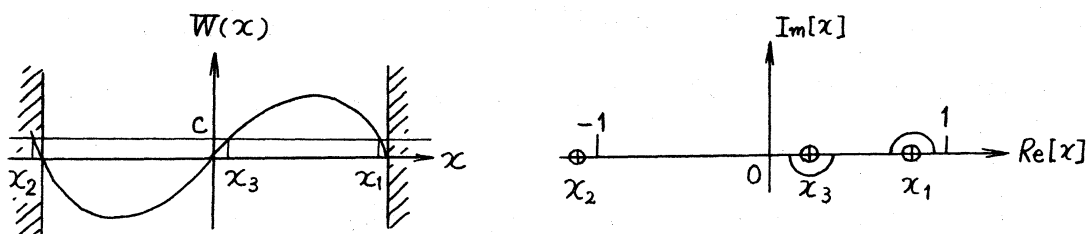


図 3。

(3.2)' の他の二つの解は,  $\alpha Re \rightarrow \infty$  の極限でも右辺が効くようないわば境界層的な解で, 変数変換:

$$\eta = \varepsilon^{-1} [-DW(x_s)]^{1/3} (x - x_s) \quad (3.7)$$

を行うことにより得られる。微小量  $\varepsilon$  としては,  $\varepsilon = (\alpha Re)^{-1/3}$  と選ぶ。中  $\varepsilon$  の power で展開し最低次の項をとると, (3.2)' の良く知られた二つの粘性解が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\text{III}} &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta h_1(\eta), \\ \phi_{\text{IV}} &= \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta h_2(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} h_1(\eta) &= \left( \frac{2}{3} e^{-3\pi i/4} \eta^{3/2} \right)^{1/3} H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left( \frac{2}{3} e^{-3\pi i/4} \eta^{3/2} \right), \\ h_2(\eta) &= \left( \frac{2}{3} e^{-3\pi i/4} \eta^{3/2} \right)^{1/3} H_{\frac{1}{3}}^{(2)} \left( \frac{2}{3} e^{-3\pi i/4} \eta^{3/2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

以上の  $\phi_{\text{I}} \sim \phi_{\text{IV}}$  によって, (3.2)' の一般解は,

$$\phi = \sum_{J=1}^{\text{IV}} C_J \phi_J \quad (3.10)$$

と表わされるが、 $\phi$ が同次境界条件(3.4)を満足するためには次の固有値方程式が成り立たねばならない。

$$F(c, \alpha, \alpha Re) = \begin{vmatrix} \phi_{\text{I}a} & \phi_{\text{II}a} & \phi_{\text{III}a} & \phi_{\text{IV}a} \\ D\phi_{\text{I}a} & D\phi_{\text{II}a} & D\phi_{\text{III}a} & D\phi_{\text{IV}a} \\ \phi_{\text{I}b} & \phi_{\text{II}b} & \phi_{\text{III}b} & \phi_{\text{IV}b} \\ D\phi_{\text{I}b} & D\phi_{\text{II}b} & D\phi_{\text{III}b} & D\phi_{\text{IV}b} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.11)$$

ただし,  $\phi_{Ja} = \phi_J(1)$ ,  $\phi_{Jb} = \phi_J(-1)$

である。次に,  $\phi_{\text{I}}$ ,  $\phi_{\text{II}}$  は,

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\text{I}b} &= 1, & D\phi_{\text{I}b} &= 0, \\ \phi_{\text{II}b} &= 0, & D\phi_{\text{II}b} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

であるように (3.6) の解を採用する。これと,  $\phi_{\text{III}}$ ,  $\phi_{\text{IV}}$  の漸近的な性質を用いて, (3.11) は

$$\begin{vmatrix} \phi_{\text{I}a} & \phi_{\text{II}a} & \phi_{\text{III}a} & 0 \\ D\phi_{\text{I}a} & D\phi_{\text{II}a} & D\phi_{\text{III}a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \phi_{\text{IV}b} \\ 0 & 1 & 0 & D\phi_{\text{IV}b} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_{\text{Ia}} - D\phi_{\text{Ia}}(1-x_1)F_1(\eta_0) \\
&\quad + (1-x_1)F_2(\eta_0)[\phi_{\text{Ia}} - D\phi_{\text{Ia}}(1-x_1)F_1(\eta_0)] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。こゝで、

$$\begin{aligned}
F_1(\eta) &= \frac{\int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta h_1(\eta)}{\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta h_1(\eta)} = \frac{1}{x-x_1} \frac{\phi_{\text{II}}}{D\phi_{\text{II}}}, \\
F_2(\eta) &= \frac{\int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta h_2(\eta)}{\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta h_2(\eta)} = \frac{1}{x-x_1} \frac{\phi_{\text{IV}}}{D\phi_{\text{IV}}}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

であり、 $\eta_0$  は壁に対応する  $\eta$  の値である。実数値の  $\eta$  に対する  $F_1(\eta)$  の値は、最初 Tietjens<sup>8)</sup> によって計算され、より精密な値は Miles<sup>9)</sup> によって計算されている。又、 $F_2(\eta)$  の値は既に Gotoh & Satoh<sup>3)</sup> に与えられているから、固有値方程式 (3.13) を解くのは、(3.12) をみたす (3.6) の解  $\phi_{\text{I}}, \phi_{\text{II}}$  を求めればよい。こゝでは、(3.6) を Runge-Kutta-Gill 法によって、所定の積分路 (図4) にそって、数値積分し、 $\phi_{\text{Ia}}, \phi_{\text{IIa}}$  を求めた。

(3.13) の解である中立安定の関係を求める手続は、 $\eta$  を与え、(3.13) をみたすように  $\alpha, Cr$  を逐次変化させ



る繰返し計算を用いた。  $Re$  は  
 このようにして得られた  $\alpha$ ,  $C_r$ ,  
 より (3.7) を用いて求められ  
 る。  $\tau$  の値を, 0.9, 1.0, 2.0,

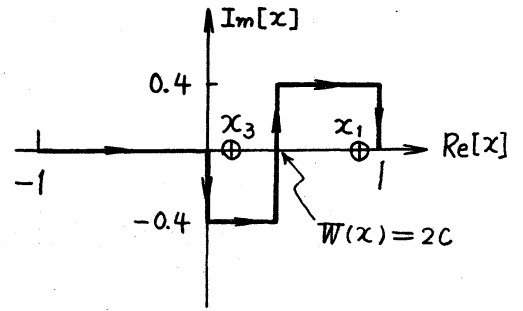


図 4

3.0,  $\infty$  にとった場合の中立交

定曲線を図 5 に示す。臨界 Reynolds 数:  $Re_{cr}$  の  $\tau$  による変  
 化を図 6 に示す。

図 5, 6 から明らかなように,  $Re_{cr}$  は  $\tau$  と共に単調に  
 減少し,  $\tau = \infty$  (定常流) の値に漸近する。  $\tau = \infty$  の中  
 立交定曲線は, Gotoh + Satoh<sup>3)</sup> の結果よりも,  $Re$  の高い方  
 にずれているが, これは Gotoh + Satoh が  $C \ll 1$  として,  
 $C$  についての展開を用いているのに対し, こゝでは直接数値  
 計算を行った事情によるもので, 後者の方が正しい値を与え  
 るであろう。

$\tau \ll 1$  のときは,  $W$ ,  $T$  は誤差函数を用いた展開のオ一  
 項のみで十分良く近似できるが, そのときそれらの函数形は  
 異なる  $\tau$  の値に対して互いに相似になり,  $W$  は  $\tau$  に比例し  
 壁の近くに生ずる境界層となる。境界層の厚さは  $\sqrt{\tau}$  に比  
 例する。そこで,

$$\tilde{x} = \frac{1-x}{2\sqrt{\tau}}, \quad \tilde{w} = \frac{W}{\tau}, \quad \tilde{c} = \frac{C}{\tau}, \quad \tilde{\alpha} = 2\sqrt{\tau}\alpha, \quad \tilde{D} = -2\sqrt{\tau}D$$

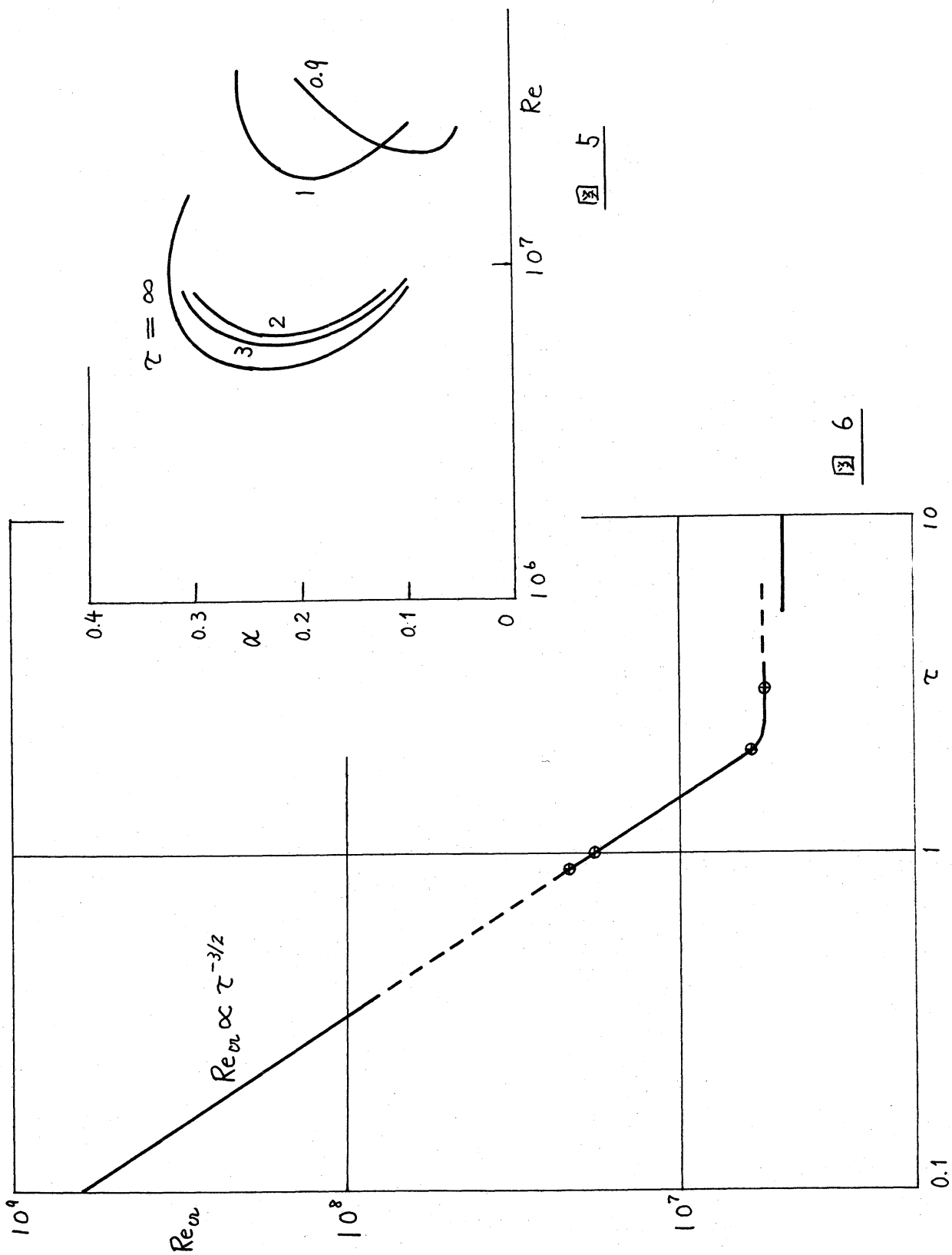


图 5

图 6

によってスケール変換を行なうと、方程式 (3.2) は、

$$\begin{aligned} & (\tilde{w} - \tilde{c})(\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi - (\tilde{D}^2 \tilde{w})\phi \\ &= \frac{1}{i\tilde{\alpha} Re \, 2\tau^{3/2}} [(\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)^2 \phi + 48\tau^{3/2} \tilde{D}\theta], \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$(\tilde{w} - \tilde{c})\tau^{3/2}\theta - \frac{1}{2}(\tilde{D}T)\phi = \frac{1}{i\tilde{\alpha} P Re \, 2\tau^{3/2}} (\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)\tau^{3/2}\theta, \quad (3.16)$$

となるから、改めて

$$\tilde{\theta} = \tau^{3/2}\theta, \quad \tilde{Re} = 2\tau^{3/2} Re,$$

とおくと

$$(\tilde{w} - \tilde{c})(\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)\phi - (\tilde{D}^2 \tilde{w})\phi = \frac{1}{i\tilde{\alpha} \tilde{Re}} [(\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)^2 \phi + 48\tilde{D}\tilde{\theta}], \quad (3.17)$$

$$(\tilde{w} - \tilde{c})\tilde{\theta} - \frac{1}{2}(\tilde{D}T)\phi = \frac{1}{i\tilde{\alpha} P \tilde{Re}} (\tilde{D}^2 - \tilde{\alpha}^2)\tilde{\theta}, \quad (3.18)$$

となり、若干の係数に違いはあるが、本質的には (3.2) と同型になる。  $\sim$  の付いた量は  $\tau$  に無関係であるから、この方程式を解けば、 $\tau \ll 1$  の場合の結果が得られる。 臨界 Reynolds 数  $Re_c$  は  $\tilde{Re}_c$  によって、

$$Re_c = \frac{1}{2}\tau^{-3/2} \tilde{Re}_c,$$

と表わされる。

図 6 から、 $\tau = 0.9 \sim 2.0$  の領域の  $\tau$  に対する  $Re_c$  の変化は既に殆んど  $\tau^{-3/2}$  になっていることが読みとられる。従って、 $\tau$  のすべての値を通じて、 $Re_c$  は  $\tau$  の増加と共に

単調に減少し、最も不安定な状態は  $\tau = \infty$  (定常流) であると結論することが出来る。

一枚の無限鉛直平板に周囲の流体との温度差を与えたときの速度分布(図7)は、 $\tau \ll 1$  の場合のそれと類似の profile を示すが、参考のためにその安定性に対する Szewczyk<sup>(10)</sup> の結果をあてはめると、

$$Re_{cr} = 7 \times 10^5 \cdot \tau^{-3/2}$$

となり、図6で  $\tau \sim 1.0$  付近の値を使って求めた

$$Re_{cr} = 1.8 \times 10^7 \cdot \tau^{-3/2}$$

と多少のへたはつきはあるが、定性的な結論を下すには十分な材料であると思われる。

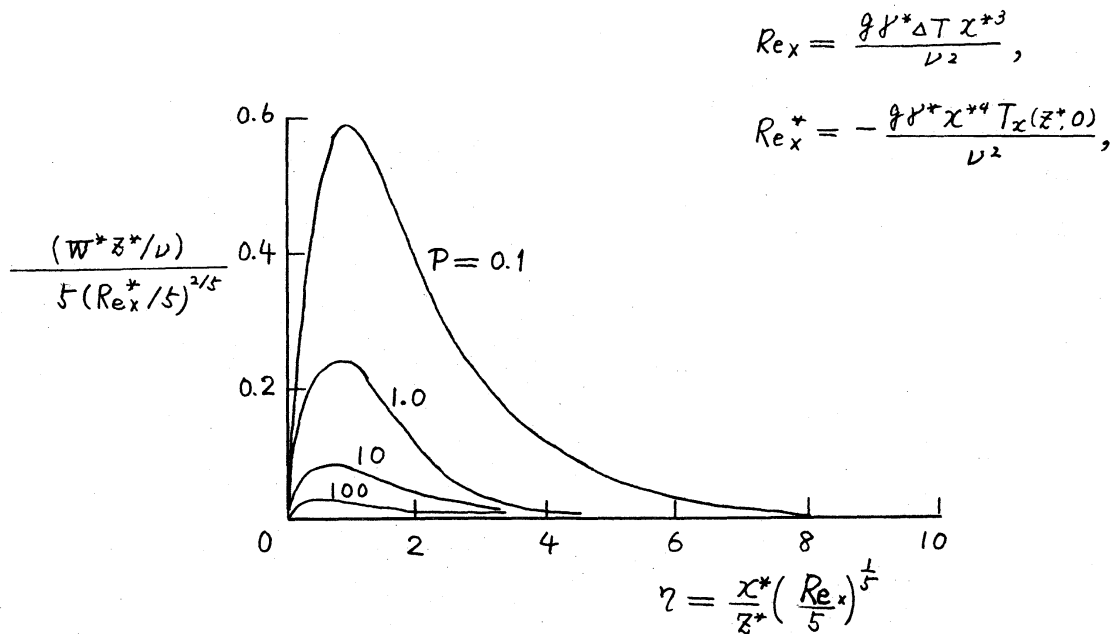


図 7

## 引用文献

- 1) J.W. Elder : J. Fluid Mech. 23 (1965) 77.
- 2) Y.Oshima : 物理学会 予稿集 (1966).
- 3) K.Gotoh and M.Satoh : J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 592.
- 4) C.M.Vest and V.S.Arpaçi : J. Fluid Mech. 36 (1969) 1.
- 5) K.Gotoh and N.Ikeda : to be published.
- 6) S.Chandrasekhar : Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability  
(Oxford Univ. Press)
- 7) C.C. Lin : The Theory of Hydrodynamic Stability (Camb. Univ.  
Press)
- 8) O. Tietjens : Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) 200.
- 9) J.W. Miles : J. Fluid Mech. 8 (1960) 593.
- 10) A.A.Szewczyk : Int. J. Heat Mass Transfer 5 (1962) 903.